www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MINISTÈRE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT,
DES TRANSPORTS ET DE LA MER

E.I.T.P.E. 1990

COMPOSITION COMMUNE DE MATHEMATIQUES

Temps accordé : 4 heures

Le problème consiste à étudier la fonction $X \longmapsto L(X)$ où X est un $n-$uple de réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tous appartenant à $[-1, +1]$, qu'on supposera rangés par ordre croissant (c'est-à-dire: $\forall i$ de 1 à $n-1$: $x_i \leq x_{i+1}$), la fonction L étant définie par

$$L(X) = \prod_{1 \leq r < s \leq n} (x_s - x_r) . \prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 - x_k{}^2\right)^{\frac{3}{4}}$$

I *Les ensembles E, E' et la fonction L*

n est un entier supérieur ou égal à 2. $\mathbb{R}^n$ est l'espace euclidien de dimension n. Un élément $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ sera assimilé à la suite des n nombres réels x_k $(1 \leq k \leq n)$ qu'on appellera coordonnées de X.

La distance euclidienne de deux éléments $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ est le nombre $d(X, X') = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x'_k - x_k)^2}$.

E désigne l'ensemble des éléments X de $\mathbb{R}^n$ tels que $-1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq 1$.

E' désigne l'ensemble des éléments X de $\mathbb{R}^n$ tels que $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$.

Dans la topologie induite par la distance euclidienne, on peut affirmer que E' est un ouvert inclus dans E qui est lui-même un fermé borné.

On pourra utiliser sans les démontrer les propriétés classiques relatives à une fonction définie, à valeurs réelles, continue sur E.

Pour $X \in E$,on posera:$L(X) = \prod_{1 \leq r < s \leq n} (x_s - x_r) . \prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 - x_k{}^2\right)^{\frac{3}{4}}$

1. Dire pourquoi L est continue sur E.

2. Trouver la borne inférieure m de L sur E et une condition nécessaire et suffisante concernant l'élément X de E pour que $L(X) = m$.

3. Considérant deux éléments <u>distincts</u> X et Y de <u>E'</u> (de coordonnées (x_k) et (y_k)), on appellera Z le milieu du bipoint (X, Y) : $\forall k$ de 1 à n : $z_k = \dfrac{x_k + y_k}{2}$

   a. Démontrer que Z appartient à E'.

   b. i et j étant deux entiers quelconques vérifiant $1 \leq i < j \leq n$, calculer en fonction de $x_j - x_i$ et de $y_j - y_i$ la différence $(z_j - z_i)^2 - (x_j - x_i)(y_j - y_i)$. Comparer $(z_j - z_i)^2$ à $(x_j - x_i)(y_j - y_i)$. (préciser si ces deux produits peuvent être égaux et à quelle condition).

   c. Comparer de même les deux nombres $(1 - z_k)^2$ et $(1 - x_k)(1 - y_k)$. Peuvent-ils être égaux et à quelle condition?

   d. Effectuer le même travail pour $(1 + z_k)^2$ et $(1 + x_k)(1 + y_k)$.

   e. Trouver une relation d'inégalité entre $L(X)$, $L(Y)$ et $\left(L(Z)\right)^2$. Préciser si l'inégalité est stricte ou large.

II *Le nombre M; le point A*

E étant fermé borné,L étant continue sur E, L admet, sur E, une borne supérieure qu'elle atteint et qu'on appellera M.

1. Démontrer que M est strictement positif, qu'il existe un élément unique A de E' tel que $L(A) = M$.

   Dorénavant, on désignera par $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ les coordonnées de cet élément A.

Tournez la page S.V.P.

2. Pour p entier quelconque appartenant à $\{1,2,\ldots,n\}$, prouver l'existence, pour $X \in E'$, de $\dfrac{1}{L(X)}\dfrac{\partial L(X)}{\partial x_p}$, que l'on calculera en fonction des coordonnées x_k de X.
3. Pour p entier quelconque fixé dans $\{1,2,\ldots,n\}$, on considère l'ensemble des points X dont les coordonnées vérifient : $\forall k \neq p \quad x_k = a_k$, x_p étant la seule coordonnée qui puisse varier (dans un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ convenable). Pour un tel X on posera alors $\lambda(x_p) = L(X)$.
   a. Que peut-on dire de : $\lambda(x_p) - M$
   i) si $x_p = a_p$ ii) si $x_p \in \mathcal{I}$, $x_p \neq a_p$?
   b. Donner la valeur de $\lambda'(a_p)$. On donnera le résultat sous forme d'une relation liant les réels a_k. (ce qui fournit quand p décrit l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$, un ensemble de n relations liant les a_k) .

III *Le polynôme Ω. L'équation différentielle $\mathcal{E}$*

On utilise l'élément A défini au *II* et ses coordonnées a_k. On pose, pour t réel :

$\Omega(t) = \prod_{k=1}^{n}(t-a_k)$ et, pour $p \in \{1,2,\ldots,n\}$: $\Delta_p(t) = \prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq p}}(t-a_k)$ ← (lire : $1 \leq k \leq n$, $k \neq p$)

1. Dans cette question, t varie dans un intervalle ouvert $\mathcal{J}$ inclus dans $]-1,+1[$, contenant a_p et ne contenant aucun autre a_k.
   Exprimer $\dfrac{\Omega''(a_p)}{\Omega'(a_p)}$ en fonction de $\dfrac{\Delta_p'(a_p)}{\Delta_p(a_p)}$.

   Utiliser ensuite le résultat du ***II.3.*** pour en déduire l'exixtence de deux polynômes α et β premiers entre eux tels que: $\alpha(a_p)\Omega''(a_p) + \beta(a_p)\Omega'(a_p) = 0$ (on imposera en outre à α d'être normalisé, c'est-à-dire d'avoir comme coefficient du terme de plus haut degré le nombre 1.)
2. Trouver une constante γ réelle telle que le polynôme $\Psi = \alpha\Omega'' + \beta\Omega' + \gamma\Omega$ ait un degré strictement inférieur à n.
   Quelle est la valeur de $\Psi(a_p)$? Que peut on en déduire pour le polynôme Ψ? Ecrire alors une équation différentielle $\mathcal{E}$ vérifiée par Ω.
   Que peut-on dire d'un polynôme Q normalisé solution de l'équation $\mathcal{E}$?

IV *Factorisation de $\Omega(t)$: calcul de a_p.*

On pourra admettre pour la suite du problème, si l'on ne l'a pas démontré, que Ω est l'unique polynôme normalisé vérifiant l'équation différentielle $\mathcal{E}$:

$$(t^2-1)\Omega''(t) + 3t\Omega'(t) - n(n+2)\Omega(t) = 0$$

1. Dans cette question, $t \in]-1,+1[$. Transformer $\mathcal{E}$ par le changement de variable défini par $\theta = \mathrm{Arccos}\, t$. En déduire une équation différentielle $\mathcal{E}'$ vérifiée par la fonction $u(\theta)$ où $u(\theta) = \Omega(\cos\theta)$.
   On pose $z(\theta) = u(\theta)\cdot\sin(\theta)$. Ecrire une équation différentielle $\mathcal{E}''$ vérifiée (pour $\theta \in]0,\pi[$) par z, z' et z''. Résoudre l'équation différentielle $\mathcal{E}''$.
2. Ecrire de deux façons différentes la limite, quand t tend vers 1,$(t<1)$, de $\sin\theta(t)\cdot\Omega(t)$. En déduire $\Omega(t)$ en fonction de θ, et d'une constante réelle, que l'on n'essaiera pas de calculer pour l'instant.
3. En utilisant d'une part l'expression que l'on vient de trouver, et d'autre part les n racines du polynôme $\Omega(t)$, calculer a_p pour p entier $\in \{1,2,\ldots,n\}$ (on rappelle que a_p est la $p^{\text{ième}}$ des coordonnées de A, rangées par ordre croissant).

Tournez la page S.V.P.

V *Calcul de* $\Omega'(a_p)$.

Pour m entier variable supérieur ou égal à 1, on pose $\Phi_m(t) = \dfrac{\sin m\theta}{\sin\theta}$,

avec $\begin{cases} \theta = \text{Arccos}\, t \\ t \in]-1,+1[\end{cases}$

1. Trouver une relation linéaire liant $\Phi_m(t), \Phi_{m+1}(t)$, $\Phi_{m+2}(t)$ (les coefficients peuvent dépendre de t).
2. Démontrer que $\Phi_m(t)$ est un polynôme en t; préciser le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.
3. En déduire l'expression de $\Omega(t)$ en fonction de θ et de n.
4. Calculer $\Omega'(t)$ en fonction de θ. En déduire $\Omega'(a_p)$.

VI *Calcul de* $T = \prod_{1\le p\le n} \sin^2\left(\dfrac{p\pi}{n+1}\right)$.

1. Décomposer sur $\mathbf{C}$ $\quad P(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$ en produits de facteurs du premier degré en z.
2. En déduire, en choisissant une valeur convenable de z, la valeur de:
$T = \prod_{1\le p\le n} \sin^2\left(\dfrac{p\pi}{n+1}\right)$.

VII *Calcul de* M

On pose $V = \prod_{1\le q<p\le n} (a_p - a_q)$ et $W = \prod_{1\le k\le n} (1 - a_k^2)$

1. Calculer en fonction de n et de V les nombres $\prod_{1\le p<q\le n} (a_p - a_q)$ et $\prod_{\substack{1\le p\le n \\ 1\le q\le n \\ p\ne q}} (a_p - a_q)$
2. Calculer V^2 en fonction des nombres $\Omega'(a_p)$ $(1 \le p \le n)$ et de l'entier n, puis en fonction de n seul.
3. Calculer W en fonction de n.
4. Calculer M.

VIII *Application*

Soit $D(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ la fonction des n variables réelles définie par:

$$D(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \sqrt{\left|\prod_{k=1}^{n} \sin\theta_k\right|} \cdot \text{dét} \begin{bmatrix} \sin\theta_1 & \sin 2\theta_1 & \ldots & \sin n\theta_1 \\ \sin\theta_2 & \sin 2\theta_2 & \ldots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin\theta_n & \sin 2\theta_n & \ldots & \sin n\theta_n \end{bmatrix}$$

(dét désignant le "déterminant"). Les n variables $(\theta_k)_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}$ décrivant le segment $[-\pi, \pi]$ par exemple, la fonction $D(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ étant visiblement continue, elle est bornée et atteint ses bornes. On appellera Δ le maximum de la valeur absolue de $D(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$.

1. Pour θ_k réel fixé tel que $\sin\theta_k \ne 0$ et pour n supérieur ou égal à 1, utiliser le résultat du ***V.2.*** pour factoriser partiellement le déterminant qui figure dans $D(\theta_1, \ldots, \theta_n)$.(dans l'expression obtenue figure encore un déterminant où interviennent les polynômes Φ_k pour k de 1 à n). On pourra poser $x_k = \cos\theta_k$.
2. A une permutation près, qui ne change pas la valeur absolue de $D(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, on supposera les θ_k ordonnés de façon que la suite $(\cos\theta_k)_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}$ soit croissante .
   a. Ecrire $|D(\theta_1, \ldots, \theta_n)|$ en fonction des réels x_k et montrer que le déterminant qui y figure peut être simplifié en ajoutant aux colonnes (à partir de la deuxième) des combinaisons linéaires convenables des colonnes précédentes.
   b. En déduire en fonction de n la valeur de Δ.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail